Übungsblatt 10 – Tutorien in der 29. Kalenderwoche

Name	Matrikelnr.	Studiengang
Michael Schilling		

Aufgabe 10.1 (Hausaufgabe, 4 Punkte)

Kreuzen Sie an, ob die folgenden Aussagen wahr (w) oder falsch (f) sind. Für jedes richtig gesetzte Kreuz gibt es 1/2 Punkt, für jedes falsch gesetzte Kreuz wird 1/2 Punkt abgezogen. Eine negative Gesamtpunktzahl wird als 0 Punkte gewertet.
Kreuzen Sie die Terme $f(x_1, x_2)$ als »richtig«, an, durch die eine Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert wird, deren Taylorpolynom 1. Grades in $(0,0)$ durch $\mathcal{T}^1_{f,(0,0)}(x_1, x_2) = 1 + x_1$ gegeben wird.

	w	f
a) $f(x_1, x_2) = e^{x_1}$	☐	☐
b) $f(x_1, x_2) = e^{x_1} \sin(x_2)$	☐	☐
c) $f(x_1, x_2) = \frac{1}{2}x_1^2 + x_2$	☐	☐
d) $f(x_1, x_2) = 1 + \sin(x_1) + \sin(x_2)$	☐	☐
e) $f(x_1, x_2) = e^{x_1} \cos(x_2)$	☐	☐
f) $f(x_1, x_2) = \sin(x_1) + \cos(x_2)$	☐	☐
g) $f(x_1, x_2) = 1 + x_1$	☐	☐
h) $f(x_1, x_2) = 1 + x_1 - x_2^2$	☐	☐

Aufgabe 10.2 (Tutorium – keine Abgabe) **»Taylor-Polynome«**

Bestimmen Sie das Taylor-Polynom zweiter Ordnung der Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad f(x,y) = (2x - 3y)\sin(3x - 2y)$$

zum Entwicklungspunkt $\vec{x} = \vec{0}$.

Aufgabe 10.3 (Tutorium – keine Abgabe) **»Notwendige Bedingung für Extremierer«**

Es sei $\Omega \subset V$ offen, und es sei $f \in \mathcal{C}^2(\Omega)$. Wenn $x \in \Omega$ ein lokaler Minimierer von f ist, dann ist die Bilinearform $f''(x) : V \times V \to \mathbb{R}$ positiv semidefinit.
Hinweis: Für $v \in V$ und geeignetes $\varepsilon > 0$ betrachte man die Hilfsfunktion

$$\varphi : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}, \qquad \varphi(t) := f(x + tv)$$

im Punkt $t = 0$.

Aufgabe 10.4 (Tutorium – keine Abgabe) **»Kritische Punkte und ihre Klassifizierung«**

Klassifizieren Sie alle kritischen Punkte der beiden folgenden Funktionen.

a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad f(x,y) := (x^2+y^2)e^{-x^2-y^2},$
Hinweis: Die Menge der kritischen Punkte von f ist $\mathbb{S}^1 \cup \{(0,0)\}$.

b) $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad g(x,y) := (4x^2+y^2)e^{-x^2-4y^2}$
Hinweis: Die Menge der kritischen Punkte von g ist $\{(0,0), (\pm 1, 0), (0, \pm 1/2)\}$.

Aufgabe 10.5 (Tutorium – keine Abgabe) **»Kettenregel«**

Seien $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ und $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$f(r,\vartheta,\varphi) = \begin{pmatrix} r\cos\vartheta\cos\varphi \\ r\cos\vartheta\sin\varphi \\ r\sin\vartheta \end{pmatrix}, \qquad g(x,y,z) = \begin{pmatrix} x^2+2yz \\ z\ln^2(x^2+1) \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie die Jacobi-Matrizen $\partial f(r,\vartheta,\varphi)$ und $\partial g(x,y,z)$ von f und von g.

b) Es sei

$$h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \qquad h(r,\vartheta,\varphi) := g\big(f(r,\vartheta,\varphi)\big).$$

Bestimmen Sie die Jacobi-Matrix $\partial h(2, \pi/4, \pi/2)$ von h an der Stelle $(2, \pi/4, \pi/2)$.